Thème : Description d'un mouvement.

Cours 9 : Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique.

(version professeur)

B.O. Mouvement dans un champ uniforme
Champ électrique créé par un condensateur plan. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme.
Principe de l'accélérateur linéaire de particules chargées.
Aspects énergétiques.
Capacités mathématiques : Résoudre une équation différentielle, déterminer la primitive d'une fonction, utiliser la représentation paramétrique d'une courbe.

I. Comment accélérer des particules et pourquoi ?

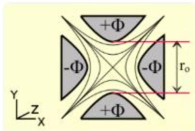
Vidéo introductive : https://www.youtube.com/watch?v=VqcpO7vqBtY

Questions :

1. L'atome d'hélium est constitué de 2 protons, de 2 neutrons et de deux électrons. Son numéro atomique est donc Z = 2.
2. Il faut faire le vide dans le dispositif afin d'éviter les frottements qui pourraient freiner ou dévier les particules.
3. La valeur de la charge de cet ion moléculaire est q = e = 1,6 × 10^{-19} C
4. les ions hélium sont positifs, ils sont donc attirés par l'électrode positive.
5. L'énergie cinétique de la particule dans le tube accélérateur augmente car la vitesse des particules augmentent.
   L'unité de cette énergie est le Joule. 1 eV = 1,6 × 10^{-19} J
6. Une implantation consiste à incruster des ions différents sur une cible afin de modifier les propriétés de cette cible.

Vocabulaire :

Quadripôle électrostatique : Un quadripôle (ou quadrupôle) est constitué de quatre électrodes parallèles. Les électrodes opposées distantes de $2r_0$ sont reliées entre elles et soumises au même potentiel. La particule sera accélérée selon l'axe Oz.



Coupe d'un quadripôle

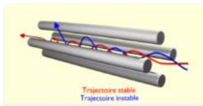
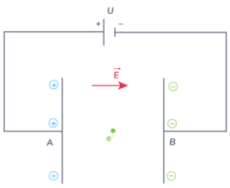


Schéma de la trajectoire stable d'un ion traversant le quadripôle

II. Notion de champ électrique uniforme $\vec{E}$

On définit en un point de l'espace proche d'un corps électrisé un « champ électrique » tout comme au voisinage de la Terre on a défini un « champ de pesanteur»
Une charge test q se trouvant en un point M de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$ (dont la source est un corps chargé) peut subir une force électrique $\vec{F}$ telle que $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$
Le champ électrique s'exprime en Volt par mètre (V/m).

Pour le condensateur plan, le champ électrique a pour expression $E = \frac{U_{PN}}{d}$
U_{PN} est la tension entre la plaque positive et la plaque négative. On peut écrire que la tension est la différence de potentiel entre la plaques positive et la plaque négative (ou P est la plaque chargée « positivement » portée au potentiel électrique V_P le plus haut, alors que N est la plaque chargée « négativement », portée au potentiel électrique V_N le plus bas).
d est la distance entre les plaques.



Le champ électrique est dirigé vers les potentiels décroissants.

Si les lignes de champ sont parallèles entre-elles , on dit que ce champ est uniforme.

Question : L'un des deux schémas est faux. Lequel et pourquoi ?

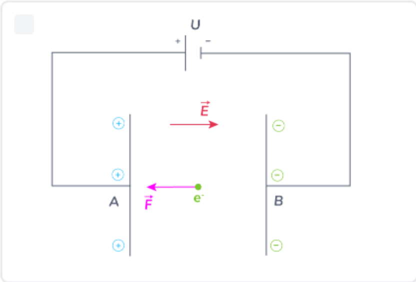


Figure 1 : VRAI

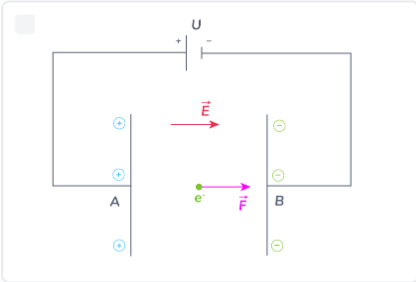


Figure 2 : FAUX

Dans les figures 1 et 2 la direction du champ électrique $\vec{E}$ est bien orienté vers les potentiels décroissants (-), par contre on constate que dans la figure 2 la force électrique $\vec{F}$ exercée sur l'électron (négatif) est dans le même sens que le champ $\vec{E}$, ce qui n'est pas possible car $\vec{F} = -e\vec{E}$

Une autre manière d'analyser la situation 2, est que l'électron ne peut pas être attiré par la plaque négative du condensateur (deux charges de même signe se repoussent).

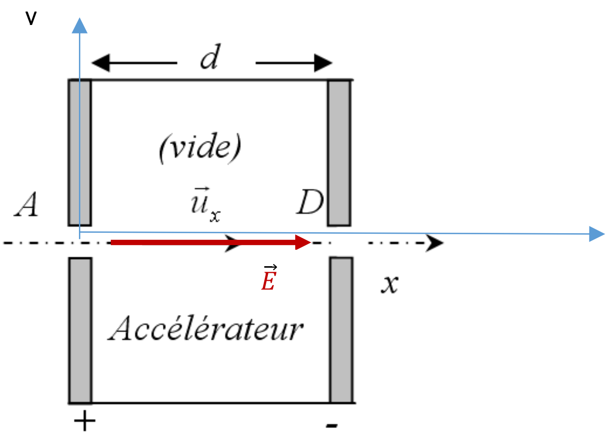
III. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique - Les différents cas classiques

- La charge unique est positive (proton) q = +e
- La charge est positive (Cu^{2+} ou He^{2+}) q = +2e
- La charge est négative (électron) q = -e

Nous étudierons deux cas, permettant de résoudre tous les types de mouvement de particules dans un champ électrique.

1. Plaque verticale – Charge positive : Principe de l'accélérateur linéaire de particules chargées.

Un proton de masse $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg et de charge électrique $q = +e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C est accéléré sous l'action d'un champ uniforme $\vec{E}$.
Sa vitesse initiale est nulle.
Ce champ électrique $\vec{E}$ est produit par l'application d'une tension U = 5 000 V entre deux plaques distantes de d = 0,100 m.
L'intensité de la pesanteur est g = 9,81 m.s^{-2}



On rappelle que l'expression de la norme du champ E est $E = \frac{U}{d}$
La norme de la force électrique exercée sur le proton a pour expression $F = qE$

<u>Questions</u> :

Après avoir montré que le poids du proton était négligeable devant la force électrique exercée sur celui-ci, déterminer les équations horaires paramétriques en appliquant la deuxième loi de Newton.

Le poids a pour valeur $P = mg$ = 1,67 × 10^{-27} × 9,81 = 1,64 × 10^{-26} N

La force électrique a pour valeur $F = qE = \frac{qU}{d} = \frac{1{,}6\times10^{-19}\times5000}{0{,}100} = 8{,}00 \times 10^{-15}$ N.

Le rapport $\frac{P}{F} = \frac{1{,}64\times10^{-26}}{8{,}00\times10^{-15}} = 2{,}05 \times 10^{-12}$ montre bien que le poids est négligeable devant la force électrique.

Système : le proton

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- Force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ ou $\vec{F} = e\vec{E}$

Appliquer la deuxième loi de Newton au centre d'inertie G du système :

$\sum \vec{F} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$

Soit : $\vec{F} = q\vec{E}$ Alors $q\vec{E} = m\vec{a}$ soit $e\frac{\vec{E}}{m} = \vec{a}$ Avec q = e

Pour connaître le signe de $a_x(t)$, il faut tenir compte du signe de la particule (dans ce cas positif) et de l'orientation du champ électrique par rapport à l'axe (Oy) (dans ce cas dans le même sens) donc son signe est ici positif.

soit $\overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} a_x(t) = e\frac{E}{m} \\ a_y(t) = 0 \end{pmatrix}$

On établit les équations horaires paramétriques :

Par définition $\overrightarrow{a_G} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_G}$ en primitivant les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}$

On constate l'existence d'une constante C dans l'expression des primitives.

En Physique, cette constante C représente la valeur de la grandeur étudiée dans les conditions initiales à $t_0 = 0$.

La particule étant abandonnée dans le champ de pesanteur sans vitesse initiale, on a :

$\overrightarrow{v_0}\begin{pmatrix} v_{0x}(0) = C_1 \\ v_{0y}(0) = C_2 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} v_{0x}(0) = 0 \\ v_{0y}(0) = 0 \end{pmatrix}$ alors $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$

En primitivant, on a :

$\overrightarrow{v_G}\begin{pmatrix} v_{Gx}(t) = e\frac{E}{m}t + C_1 \\ v_{Gy}(t) = C_2 \end{pmatrix}$ or $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$ alors $\overrightarrow{v_G}\begin{pmatrix} v_{Gx}(t) = e\frac{E}{m}\cdot t \\ v_{Gy}(t) = 0 \end{pmatrix}$

Par définition $\overrightarrow{v_G} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ en primitivant les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_G}$

$\overrightarrow{OG_0}\begin{pmatrix} OG_{0x}(0) = C_3 \\ OG_{0y}(0) = C_4 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} OG_{0x}(0) = 0 \\ OG_{0y}(0) = 0 \end{pmatrix}$ alors $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$

En primitivant, on a :

$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = \frac{1}{2}e\frac{E}{m}\cdot t^2 + C_3 \\ y(t) = C_4 \end{pmatrix}$ or $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$ alors $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = \frac{1}{2}e\frac{E}{m}\cdot t^2 \\ y(t) = 0 \end{pmatrix}$

$v_x(t) = \frac{qE}{m}t = \frac{qU}{md}\ t = \frac{1{,}60\times10^{-19}\times5000}{1{,}67\times10^{-27}\times0{,}100}t = 4{,}79 \times 10^{12}t$
$x(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{qE}{m}\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{qU}{md}\cdot t^2 = 2{,}40 \times 10^{12}\,t^2$

Conclusion : Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

2. Plaques horizontales – charge négative.

L'expérience de J.J. Thomson

Lors de ses recherches dans son laboratoire de Cambridge, Thomson conçoit un dispositif dans lequel un faisceau d'électrons est dévié lors de son passage entre deux plaques où règne un champ électrique. La mesure de la déviation du faisceau d'électrons lui permet alors de déterminer le rapport e/m_e.

L'étude suivante porte sur le mouvement d'un électron du faisceau qui pénètre entre deux plaques parallèles et horizontales P_1 et P_2, dans une zone où règne un champ électrique $\vec{E}$ supposé uniforme et perpendiculaire aux deux plaques.

À l'instant $t = 0$ s, l'électron arrive en un point O avec une vitesse horizontale $\vec{v_0}$.
La trajectoire de l'électron s'effectue dans un repère (O,x,y)
L'électron de masse m_e et de charge $q = -e$, dont le mouvement étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, est soumis à la seule force électrostatique $\vec{F_e}$.

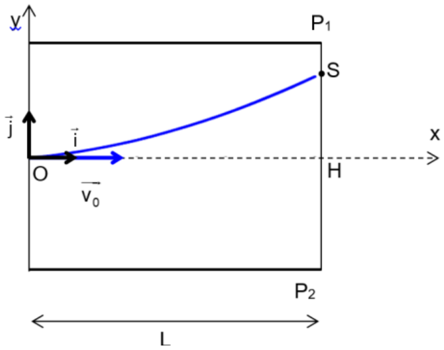
2.1. Représenter sans souci d'échelle et en justifiant les tracés :
- le vecteur force $\vec{F_e}$ en un point de la trajectoire de l'électron ;
- le vecteur champ électrique $\vec{E}$ en un point quelconque situé entre les plaques P_1 et P_2.

2.2. En utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer les équations horaires x(t) et y(t) du mouvement de l'électron.

2.3. Vérifier que la trajectoire de l'électron a pour équation : $y = \dfrac{e.E}{2.m_e.v_0^2}.x^2$.

2.4. À la sortie de la zone entre les plaques P_1 et P_2, l'électron a subi une déviation verticale SH comme l'indique le schéma. On mesure $SH = y_S = 2{,}0\times10^{-2}$ m.
Déterminer, dans cette expérience, la valeur du rapport e/m_e de l'électron.
Conclure.

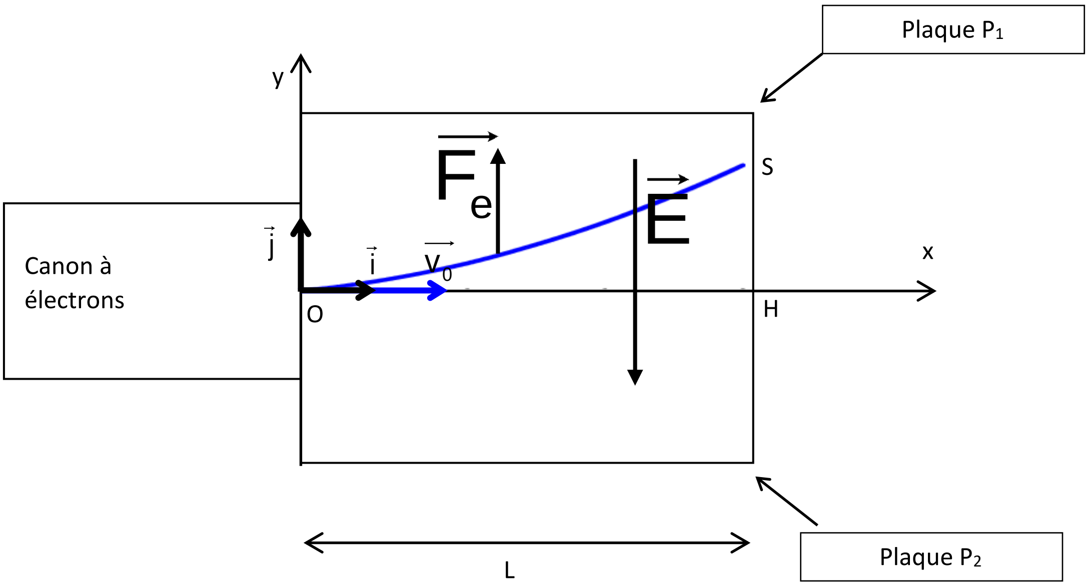
Données : Longueur des plaques : $L = 9{,}0\times10^{-2}$ m
Vitesse initiale de l'électron : $v_0 = 2{,}4\times10^7$ m.s^{-1}
Valeur du champ électrique : $E = 1{,}6\times10^4$ V.m^{-1}



<u>Réponse</u> :

2.1. La trajectoire de l'électron est courbée vers la plaque P_1 à cause de l'effet de la force électrostatique $\overrightarrow{F_e}$. On en déduit que cette force a pour sens vers la plaque P_1.

Il est indiqué que le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire aux deux plaques et on sait que $\overrightarrow{F_e} = -e.\vec{E}$. Ainsi le champ $\vec{E}$ a un sens opposé à celui de la force $\overrightarrow{F_e}$ et la force $\overrightarrow{F_e}$ est également de direction verticale.



2.2. On applique la deuxième loi de Newton au système électron, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Appliquer la deuxième loi de Newton au centre d'inertie G du système :

$\sum \vec{F} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$

Soit : $\vec{F} = q\vec{E}$ Alors $q\vec{E} = m\vec{a}$ soit $-e\frac{\vec{E}}{m} = \vec{a}$ Avec q = -e

$\vec{a} = \frac{-e.\vec{E}}{m_e}$ Le vecteur accélération est de sens opposé au vecteur champ $\vec{E}$

De plus le champ $\vec{E}$ est opposé au sens de l'axe Oy

Par projection du champ $\vec{E}$ suivant les axes du repère, on obtient $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{e.E}{m} \end{cases}$

Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, en primitivant on obtient $\vec{v}\begin{cases} v_x = 0 + C_1 \\ v_y = \dfrac{e.E}{m_e}.t + C_2 \end{cases}$ où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.

À t = 0, $\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$, on en déduit que $C_1 = v_0$ et $C_2 = 0$.

Donc $\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \dfrac{e.E}{m_e}.t \end{cases}$

Soit G le centre d'inertie de l'électron, $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0.t + C_3 \\ y = \dfrac{e.E}{2.m_e}.t^2 + C_4 \end{cases}$

À t = 0, le point G est confondu avec l'origine du repère $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, on en déduit que $C_3 = C_4 = 0$.

Ainsi $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0.t & (1) \\ y = \dfrac{e.E}{2.m_e}.t^2 & (2) \end{cases}$

2.3. D'après (1), on a t = $\dfrac{x}{v_0}$ que l'on reporte dans (2). Il vient $\boxed{y = \dfrac{e.E}{2.m_e}.\dfrac{x^2}{v_0^2}}$ comme indiqué dans le sujet.

2.4. On remplace x et y par les coordonnées du point S ($x_S = L$; y_S), alors $y_S = \dfrac{e.E}{2.m_e}.\dfrac{L^2}{v_0^2}$.

On en déduit que $\boxed{\dfrac{e}{m_e} = \dfrac{2.y_S.v_0^2}{E.L^2}}$

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2\times 2{,}0\times 10^{-2}\times\left(2{,}4\times 10^{7}\right)^2}{1{,}6\times 10^{4}\times\left(9{,}0\times 10^{-2}\right)^2}$$ = **$1{,}8\times10^{11}$ $C.kg^{-1}$**

Calculons la valeur de ce même rapport avec les valeurs admises actuellement :

$$\frac{e}{m_e} = \frac{1{,}602176565\times 10^{-19}}{9{,}1093826\times 10^{-31}}$$ = $1{,}7588201\times10^{11}$ $C.kg^{-1}$.

Les deux valeurs sont parfaitement concordantes, seul le nombre de chiffres significatifs change.